Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Aplicaciones lineales

En esta práctica pretendemos revisar la definición de aplicación lineal así como el cálculo de la expresión matricial de una aplicación lineal respecto de las bases canónicas del dominio y codominio de dicha aplicación. Posteriormente revisamos conceptos relacionados con las aplicaciones lineales como son el núcleo y la imagen y a partir de ellos clasificamos las aplicaciones lineales.

1.- APLICACIÓN LINEAL.

Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, una aplicación $f:V \longrightarrow V'$ se dice que es una **aplicación lineal** si verifica:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$.
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.

Para definir la aplicación lineal en Mathematica lo primero debemos de seguir las reglas habituales de definición de funciones:

```
nombre[variable_]:= expresión
```

teniendo en cuenta que en este caso tendremos como "variable" un vector y como expresión otro vector:

Ejemplo 8.1. Definir en Mathematica la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + y – z, y + 5z)$ y calcular f(3,2,1)

Primero definimos la aplicación f:

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}**

Nótese que el argumento de f es un vector ({x_,y_,z_}) con tres componentes x, y y z, cada uno de las cuales van seguidos de _ para indicar que son variables. Comprobamos ahora que f está bien definida calculando la imagen del vector (3, 2, 1):

In[]:= **f[{3,2,1}]**

Out[]:= `{6, 5, 10, 7}`

■

En la práctica a la hora de estudiar si f es aplicación lineal no se suele usar la definición sino la siguiente caracterización:

<u>Caracterización</u>
La aplicación f: V $\longrightarrow$ V’ es lineal si, y solo si,

$$f(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, f(u) + \beta\, f(v),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u,v \in V.$$

Ejemplo 8.2. Estudiar si la aplicación del ejemplo anterior es lineal.

In[]:= **Simplify[f[a*{x1,y1,z1}+b*{x2,y2,z2}]]==
Simplify[a*f[{x1,y1,z1} + b*f[{x2,y2,z2}]]**

Out[]:= `True`

■

Ejemplo 8.3. Estudiar si la aplicación g: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por g(x, y, z) = (x y, x + y) es lineal.

Primero introducimos la nueva aplicación:

In[]:= **g[{x_,y_,z_}]:={x*y,x+y}**

Ahora comprobamos si es lineal:

In[]:= **Simplify[g[a*{x1,y1,z1}+b*{x2,y2,z2}]] ==
Simplify[a*g[{x1,y1,z1}] + b*g[{x2,y2,z2}]]**

Out[]:= `{a (x + b x1), a (x + b x1 + y + b y1)} == {a x + b x1, a x + b x1 + a y + b y1}`

Nótese que en este caso no nos devuelve ni “True” ni “False” pues Mathematica entiende que dependiendo de los valores de a y b se puede dar la igualdad. Sin embargo nosotros sabemos que para que la aplicación sea lineal debe darse la igualdad para todos los valores de a y b y al salirnos una expresión como la anterior quiere decir que no es cierto. Por tanto, podemos deducir que la aplicación no es lineal.

Otra forma de comprobarlo es utilizando la triple igualdad “===”, para que nos compruebe si la expresión es igual para todos los valores de los parámetros que aparecen.

In[]:= **Simplify[g[a*{x1,y1,z1}+b*{x2,y2,z2}]] === Simplify[a*g[{x1,y1,z1}] + b*g[{x2,y2,z2}]]**

Out[]:= `False`

■

2.- EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Sea f: V $\longrightarrow$ V' una aplicación lineal y sea B=$\{e_1,e_2,...,e_n\}$ la base canónica de V. Entonces f está totalmente determinada por las imágenes de los vectores de B, es decir, $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$, pues dado un vector x de V de coordenadas $x = (x_1,...,x_n)_B$, entonces,

$$f(x) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n)$$

Sea ahora B'=$\{u_1,...,u_m\}$ la base canónica de V' y consideremos las coordenadas de los vectores $f(e_1),...,f(e_n)$ respecto de B':

$$\begin{cases} f(e_1) = (a_{11}, \dots, a_{m1})_{B'} \\ f(e_2) = (a_{12}, \dots, a_{m2})_{B'} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = (a_{1n}, \dots, a_{mn})_{B'} \end{cases}$$

De esta forma se tiene:

$$f(x) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n, ...,\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}\,x_n)_{B'}$$

Ahora bien, si denotamos a las coordenadas de f(x) por $f(x) = (y_1,...,y_m)_{B'}$, entonces se obtiene:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

o matricialmente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de **ecuación matricial** de una aplicación lineal f respecto de las bases B y B'. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de **matriz asociada** a f respecto de las bases B y B' que denotaremos por A = $M_{B,B'}$(f). Notar que el número de columnas es igual a la dimensión de V y su número de filas igual a la dimensión de V'.

Ejemplo 8.4. Calcular la expresión matricial de la aplicación lineal f del ejercicio 8.1. respecto de las bases canónicas.

Definimos f, introducimos la base canónica mediante **IdentityMatrix[3]** y calculamos la matriz asociada a f respecto de esta base:

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}**
B= IdentityMatrix[3];
A= Transpose[Table [f[B[[i]]],{i,1,3}]];
MatrixForm[A]

Out[]:=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 8.5. Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases **B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)} y B'={(1,2,3,0), (2,4,6,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)}.**

Definimos f, introducimos las bases B y B' y calculamos la matriz asociada a f respecto de esta base:

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}**
B= {{1,1,1},{1,1,0},{1,0,0}};
Bp={{1,2,3,0},{2,4,6,1},{1,0,0,0},{0,1,0,0}};

Denotamos por A a la matriz asociada a f respecto de B y Bp:

In[]:= **A= Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[Bp], f[B[[i]]]],{i,1,3}]];**

Out[]:=

$$\begin{pmatrix} 11 & \frac{-2}{3} & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

■

3.- RELACIÓN ENTRE MATRICES ASOCIADAS A DISTINTAS BASES.

Sea $f:V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con n=dim(V), m=dim(V'), y consideremos B y $\overline{B}$ bases de V y B' y $\overline{B}'$ bases de V', si A es la matriz asociada a f respecto de B y B' y C es la matriz asociada a f respecto de $\overline{B}$ y $\overline{B}'$, se tiene que C y A son matrices equivalentes, además $C = Q^{-1}AP$, donde P es la matriz del cambio de base en V de $\overline{B}$ a B y Q es la matriz del cambio de base en V' de $\overline{B}'$ a B'. En el caso particular de un endomorfismo y tomando la misma base en el espacio de partida y en el de llegada, la relación entre A y C es $C = P^{-1}AP$.

Dos matrices cuadradas A y C para las que existe una matriz regular P de forma que $C = P^{-1}AP$ se dice que son **semejantes**.

Proposición

1. Dos matrices son equivalentes si, y solo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.
2. Dos matrices son semejantes si, y solo si, son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

Ejemplo 8.6. Comprobar la relación entre la matriz asociada a f respecto de las bases anteriores y la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

Definimos f, introducimos las bases canónicas que denotaremos por Bc3 y Bc4 respectivamente y calculamos la matriz asociada a f respecto de esta base:

```
In[]:= f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}
       Bc3= IdentityMatrix[3];
       Bc4=IdentityMatrix[4];
       B= {{1,1,1},{1,1,0},{1,0,0}};
       Bp={{1,2,3,0},{2,4,6,1},{1,0,0,0},{0,1,0,0}};
```

Denotamos por c a la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas y por A a la matriz asociada a f respecto de B y Bp. Si P y Q son las matrices del cambio de base de B a Bc3 y de Bp a Bc4, respectivamente, se tiene que en efecto $Q^{-1}A\,P = c$:

```
In[]:= c= Transpose[Table [f[Bc3[[i]]],{i,1,3}]];
       A= Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[Bp],
              f[B[[i]]]],{i,1,3}]];
```

```
P = Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[B],Bc3[[i]]],{i,3}]];
Q = Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[Bp],Bc4[[i]]],{i,4}]];
Inverse[Q].A.P==c
```

Out[]:= True

■

4.- OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES Y RELACIÓN CON LAS MATRICES ASOCIADAS

Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, denotaremos por $Hom_{\mathbb{K}}$ (V, V') al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V'. En este conjunto se podemos definir operaciones suma y producto por escalar de la forma: dadas f, g $\in$ $Hom_{\mathbb{K}}$(V, V') y $\lambda \in \mathbb{K}$ se define las aplicaciones lineales:

$$f + g: V \longrightarrow V'; \ (f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

$$\lambda f: V \longrightarrow V'; \ (\lambda f)(u) = \lambda f(u)$$

Dadas aplicaciones lineales f: V $\longrightarrow$ V' y g: V' $\longrightarrow$ V'', su composición g o f: V $\longrightarrow$ V'' definida por g o f (x) = g(f(x)) es también lineal.

Veamos como la asignación a una aplicación lineal de su matriz asociada se comporta bien respecto a las operaciones con aplicaciones lineales:

<u>Proposición</u>

Sean V, V' y V'' espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensiones finitas, B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente y f,g: V $\longrightarrow$ V' y h:V' $\longrightarrow$ V'' aplicaciones lineales, entonces se tiene:

1. $M_{B,B'}(f + g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g)$.
2. $M_{B,B'}(\lambda f) = \lambda\, M_{B,B'}(f)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $M_{B,B''}(hof) = M_{B',B''}(h)\, M_{B,B'}(f)$.

Ejemplo 8.7. Calcular las matrices asociadas a f y h respecto de las bases canónicas y a partir de ellas comprobar que la matriz asociada a la composición coincide con el producto de las anteriores donde:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } f(x, y, z) = (x+y, 3x+y-z, y+5z) \text{ y}$$

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ dada por } h(x, y, z) = (2x-z, x+y, 3x+y-z, 2y+z)$$

Definimos f y h, introducimos la base canónicas que denotaremos por Bc3 mediante **IdentityMatrix[3]** y calculamos las matrices asociada a f y h respecto de esta base:

In[]:=
```
f[{x_,y_,z_}]:={x+y, 3x+y-z, y+5z}
h[{x_,y_,z_}]:={2x-z, x+y, 3x+y-z, 2y+z}
B= IdentityMatrix[3];
Af = Transpose[Table [f[B[[i]]],{i,1,3}]]; MatrixForm[Af]
Ah = Transpose[Table [h[B[[i]]],{i,1,3}]]; MatrixForm[Ah]
```

Out[]:=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos por c a la composición y Ac a la matriz asociada a la composición respecto de las bases canónicas:

In[]:= **c[{x_,y_,z_}] = h[f[{x,y,z}]];**
Ac = Transpose[Table [c[B[[i]]],{i,1,3}]]; MatrixForm[Ah]

Out[]:=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos el tercer apartado de la proposición previa:

In[]:= **Ac == Ah.Af**

Out[]:= True

■